Série TP N=˚2 (Solution)
Résolution numérique d'équations non linéaires

1 Exercice

Trouver des encadrement pour les 3 racines de la fonction suivante utilisant les fonctionnalités graphiques de Matlab :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6;$$

Solution

Pour trouver un encadrement de cette racine on va tracer la courbe de $f(x)$ ainsi :

```
>> x=[0:0.1:4];
>> f=x.^3-6*x.^2+11*x-6;
>> plot(x,f); grid on
```

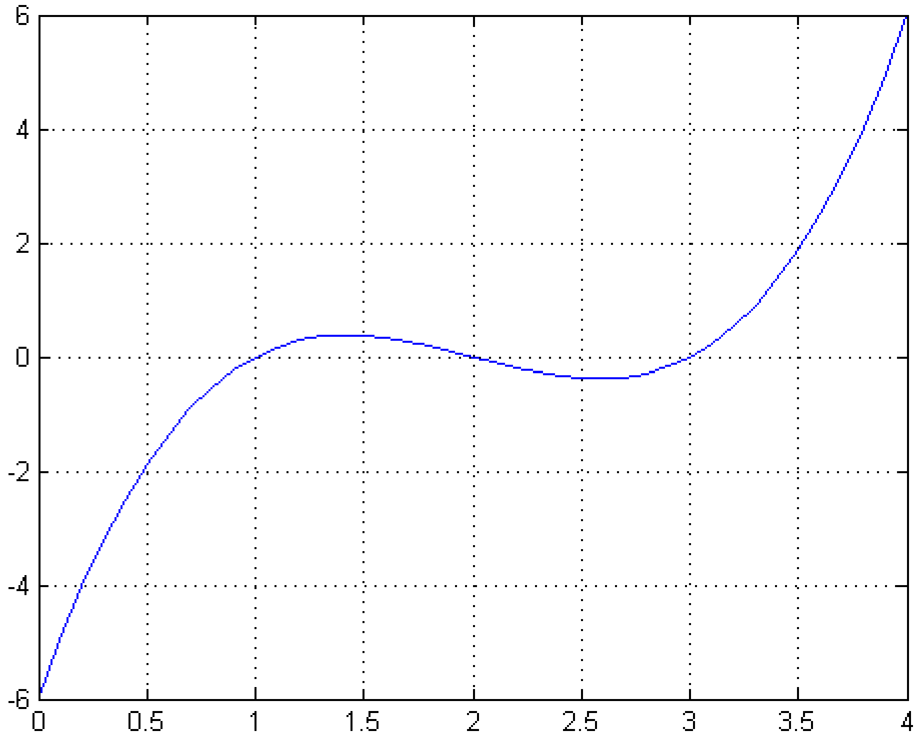

FIGURE 1 – La fonction $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

2 Exercice

En utilisant les fonctionnalités graphiques de MATLAB, localiser la racine positive de l'équation :

$$f(x) = 2sin(x) - x$$

Solution

```
>> x=[0:0.1:4];
>> f=2*sin(x)-x;
>> plot(x,f); grid on;
```

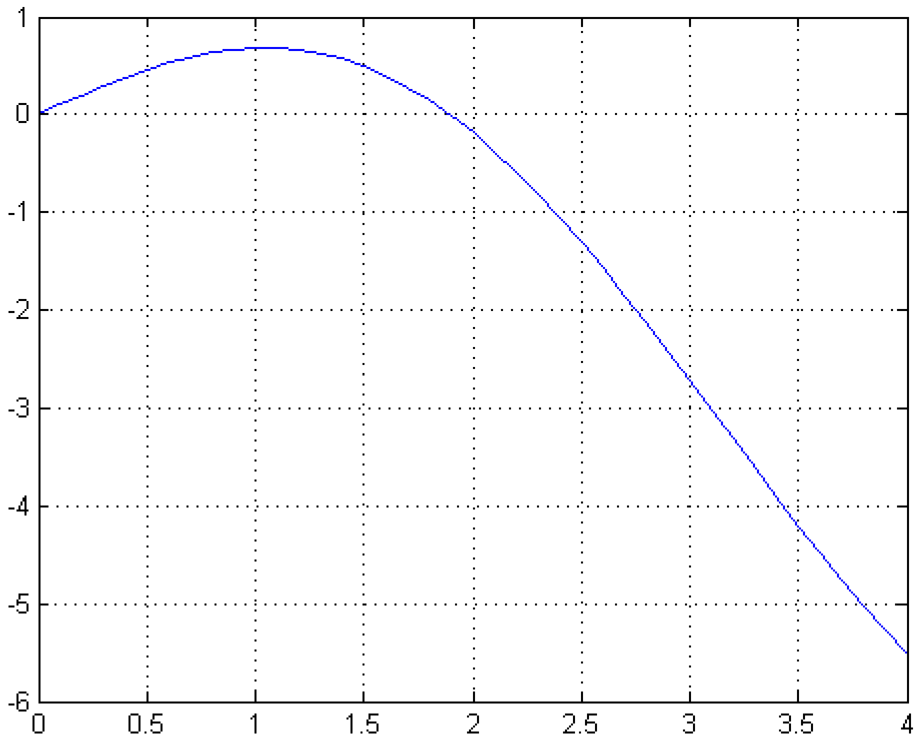

FIGURE 2 – La fonction :$f(x) = 2 * sin(x) - x$

3 Exercice

Appliquer la méthode de dichotomie, pour trouver la valeur approchée de la racine de $f(x)$ définie dans l'exercice 2.

Solution

On va utiliser l'algorithme de Dichotomie ainsi :

```
a=1.5 ;
b=2 ;
c=(a+b)/2;
tol=1e-6;
iter=0;
while abs(2*sin(c)-c) > tol
    if (2*sin(a)-a)*(2*sin(c)-c) <0
         b=c;
  end
if (2*sin(c)-c)*( 2*sin(b)-b)<0
```

```
        a=c;
     end
c=(a+b)/2;
iter=iter+1;
end
c
iter
```

Le programme sera souvegarder : **Bissection.m**. En exécutant le programme sur la ligne de commande :

```
>> Bissection

c =

    1.8955


iter =

    17
```

4 Exercice

On considère l'équation :

$$f(x) = e^x - 4x$$

1. Déterminer le nombre et la position approximative des racines positives de f.
2. Utiliser l'algorithme de bissection pour déterminer la plus petite de ces racines, avec une précision de 10^{-7}.

Solution

1. On va choisir un intervalle positive quelconque :

```
>> x=[0:0.1:4];
>> f=exp(x)-4*x;
>> plot(x,f); grid on;
```

On obtient le graphe de la Figure 3

On peut restreindre l'intervalle pour voir mieux les racines :

```
>> x=[0:0.1:3];
>> f=exp(x)-4*x;
>> plot(x,f); grid on;
```

la Figure4 illustre le nouveau graphe.

On peut voir clairement que l'encadrement des deux racines est :

1. La première racine est dans le sous-intervalle : [0, 0.5]
2. La deuxième racine est dans le sous-intervalle : [2,2.5]

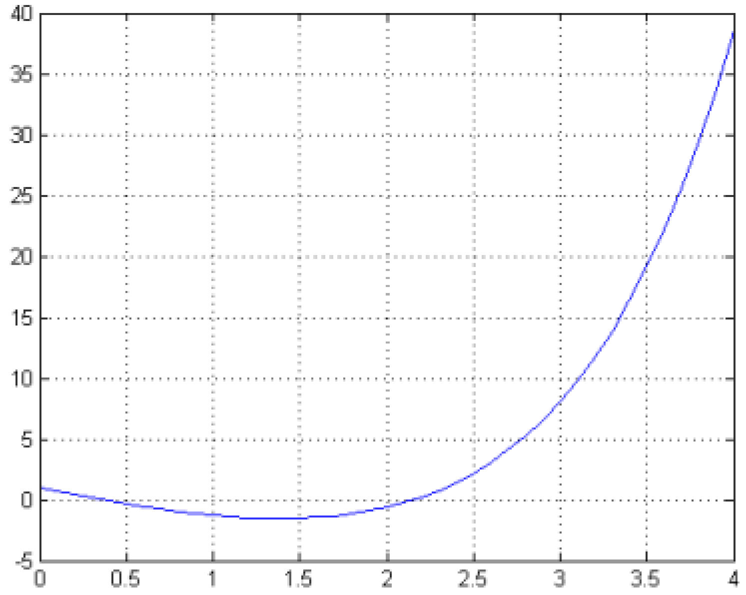

FIGURE 3 – La fonction :$f(x) = e^x - 4x$ dans l'intervalle [0,4]

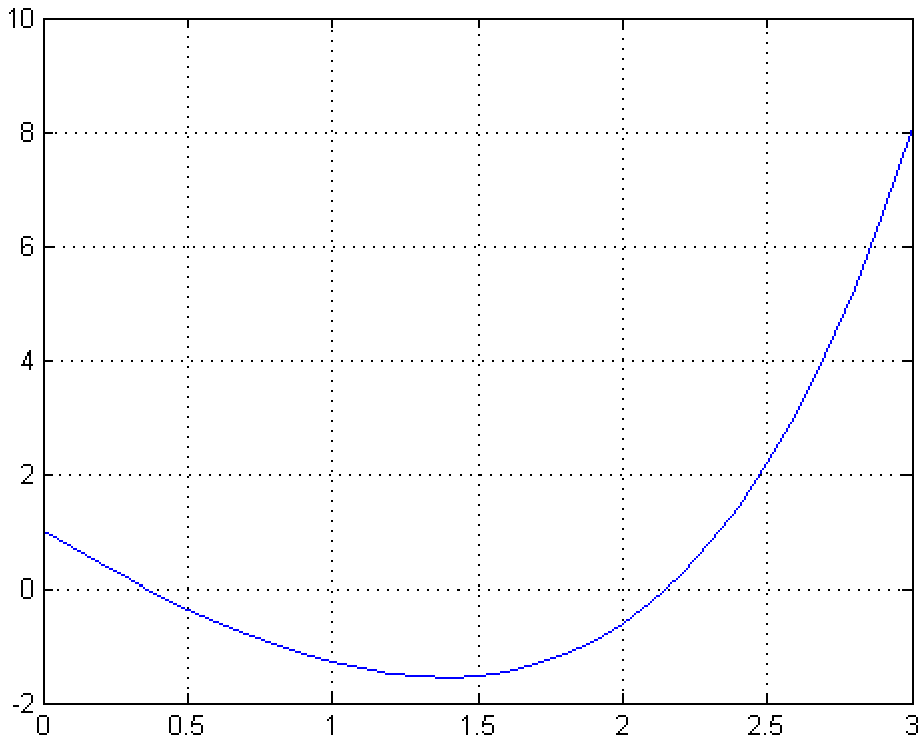

FIGURE 4 – La fonction :$f(x) = e^x - 4x$ dans l'intervalle [0,3]

2. La plus petite racine est situé dans l'intervalle : [0, 0.5], et la précision demandé est de 10^{-7} alors :

```
a=0 ;
b=0.5 ;
c=(a+b)/2;
tol=1e-7;
iter=0;
while abs(exp(c)-4*c) > tol
    if (exp(a)-4*a)*(exp(c)-4*c) <0
         b=c;
  end
if (exp(c)-4*c)*( exp(b)-4*b)<0
        a=c;
     end
c=(a+b)/2;
iter=iter+1;
end
c
iter
```

En exécutant le programme on obtient la racine $c = 0.3574$ après 21 itérations.

```
>> Bissection

c =

    0.3574


iter =

    21
```

5 Exercice

En utilisant la méthode de dichotomie on désire trouver un zéro de la fonction :

$$f(x) = x.sin(x) - 1$$

1. Montrer que l'intervalle $[0; 2]$ peut être choisi comme intervalle initial pour cette recherche.
2. Appliquer l'algorithme et calculer la valeur approchée de la racine et de la fonction.
3. Quel est le nombre maximal d'itérations nécessaires pour atteindre une précision sur la racine au rang de 10^{-3}.

Solution

1. On va calculer $f(0)$ et $f(2)$:

1. $f(0) = -1$;
2. $f(2) = 0.8186$;

On a $f(0) \times f(2) < 0$ alors : il ya au moins une racine dans l'intervalle [0,2].

2. Le programme Matlab :

```
a=0 ;
b=2 ;
c=(a+b)/2;
tol=1e-3;
iter=0;
while abs(c*sin(c)-1) > tol
    if (a*sin(a)-1)*(c*sin(c)-1) <0
         b=c;
  end
if (b*sin(b)-1)*( c*sin(c)-1)<0
        a=c;
     end
c=(a+b)/2;
iter=iter+1;
end
c
iter
fc=c*sin(c)-1
```

En exécutant le script :

```
>> Bissection

c =

    1.1143


iter =

    10


fc =

  1.3981e-004
```

6 Exercice

Soit la fonction : $f(x) = -5x^3 + 39x^2 - 43x - 39$. On cherche à estimer $x \in [1; 5]$ tel que : $f(x) = 0$.

Solution

$f(1) = -5(1)^3 + 39(1)^2 - 43(1) - 39 = -48$ (0.5 pt)
$f(5) = -5(5)^3 + 39(5)^2 - 43(5) - 39 = 96$ (0.5 pt)
$f(1) \times f(5) < 0$ alors il y a une racine $c \in]1, 5[$ (1 pt)

Iter 1 : $c = \frac{1+5}{2} = 3$, (0.5 pt)
$f(c) = -5(3)^3 + 39(3)^2 - 43(3) - 39 = 48$ (0.5 pt)
$f(1) \times f(3) < 0$ la racine $c \in]1, 5[$ (0.5 pt)

Iter 2 : $c = \frac{1+3}{2} = 2,$ (0.5 pt)
$f(c) = -5(2)^3 + 39(2)^2 - 43(2) - 39 = -9$ (0.5 pt)
$f(2) \times f(3) < 0$ la racine $c \in]2, 3[$ (0.5 pt)

7 Exercice

Soit la fonction $f(x) = e^{-2x} - cos(x) - 3$

1. Vérifier que le zéro de cette fonction est situé dans l'intervalle $[-1; 0]$;
2. Calculer la valeur de ce zéro par la méthode de Newton avec comme point initial le point $x_0 = 0$.

Solution

1. On a :

1. $f(-1) = 3.8488$.
2. $f(0) = -3$.

2. Calcul de la racine Programme Matlab :

```
tol=1e-4;
iter=0;
x=0;
while abs(exp(-2*x)-cos(x)-3)>tol
xi=x;
x=xi-(exp(-2*xi)-cos(xi)-3)/( -2*exp(-2*xi)+sin(xi));
iter=iter+1;
end
x
iter
fx=exp(-2*x)-cos(x)-3
```

Application du programme :

```
>> Newton

x =

   -0.6657


iter =

     6


fx =

  4.4283e-007
```

8 Exercice

Trouver la racine 'c' de la fonction $f(x) = x^3 + 4x^2 + 7$ dans le voisinage de $x_0 = -4$, avec une précision de 5 places decimal.

Solution

```
>> Newton

x =

   -4.3670


iter =

     4


fx =

 -2.1728e-011
```